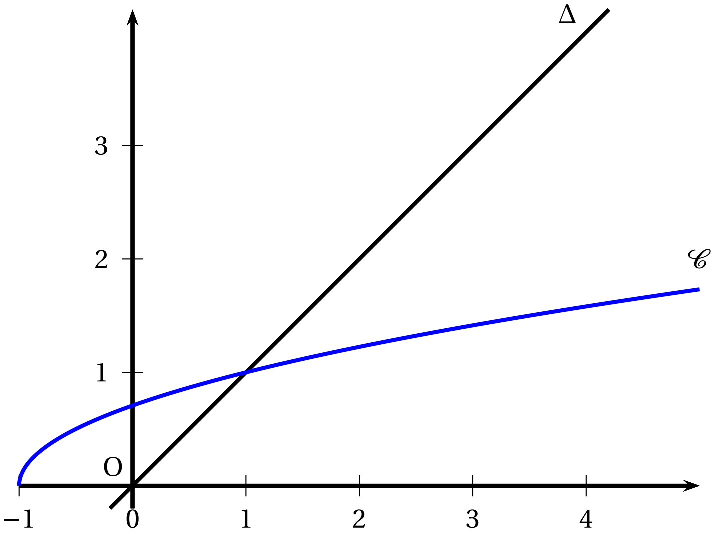
EXERCICE 1. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, alors on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



① (a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

(b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

② Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

③ En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

④ En constatant que $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \iff (u_{n+1})^2 = \dfrac{1+u_n}{2}$ car $u_{n+1} \geq 0$ et en utilisant les règles d'opérations sur les limites, déterminer ℓ.

EXERCICE 2. Étude d'une fonction irrationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2}$, dont $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative.

① Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

② Tracer $\mathscr{C}_f$ sur la calculatrice. Au vu du graphique, que peut-on conjecturer sur la dérivabilité de f aux bornes de l'ensemble de définition ?

③ Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$.

④ Montrer que f est dérivable en -1 et donner la valeur de $f'(-1)$. Interpréter graphiquement le résultat.

⑤ Montrer que f n'est pas dérivable en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

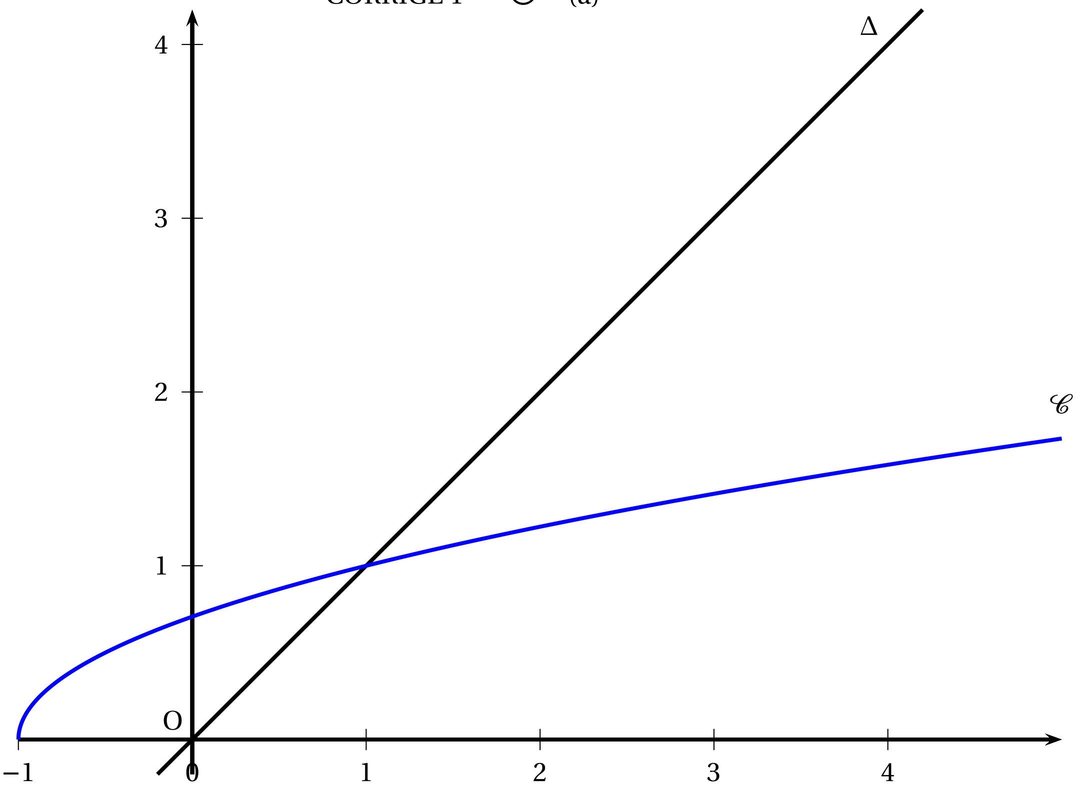
⑥ Montrer que pour tout $x \in]-1;1[$, $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}$.

⑦ En déduire le tableau de variation de f, en calculant la valeur exacte du maximum.

⑧ Donner une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

⑨ Étudier la position relative de (T) et de $\mathscr{C}_f$.

CORRIGÉ 1 ① (a)



(b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement décroissante et convergente vers 1.

② Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$:« $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** $u_0 = 4$ et $u_1 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
  On a bien $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$
  La fonction $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ étant croissante sur $[0;4]$ (par composition des deux fonctions croissantes que sont la fonction affine $x \mapsto \dfrac{1+x}{2}$ suivie de la fonction racine carrée), on a :
  $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$ et donc :
  $0 \leq \sqrt{\dfrac{1}{2}} \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq \sqrt{\dfrac{1}{2}} \leq 4$
- **Conclusion :** la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

③ La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel $\ell \geq 0$.

④ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} = \ell$
et d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\ell}{2}}$
On résout donc sur $[0;+\infty[$ l'équation :
$\ell = \sqrt{\dfrac{1+\ell}{2}}$
$\iff \ell^2 = \dfrac{1+\ell}{2}$ **car** $\ell \geq 0$ sans quoi il n'y a pas équivalence
$\iff 2\ell^2 - \ell - 1 = 0$ Le membre de gauche est un trinôme possédant une racine évidente : 1, donc il est factorisable par $\ell - 1$:
$\iff (\ell-1)(2\ell+1) = 0$
$\iff \ell = 1$ ou $\ell = -\frac{1}{2}$
$\iff \ell = 1$ car $\ell \geq 0$

CORRIGÉ 2 Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2}$, dont $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative.

① Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 1 - x^2 \geq 0\} = [-1;1]$

② Tracer $\mathscr{C}_f$ sur la calculatrice. Au vu du graphique, que peut-on conjecturer sur la dérivabilité de f aux bornes de l'ensemble de définition ?

f semble dérivable en -1, mais pas en 1 (tangente verticale).

③ Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$.

Soit $u : x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur $]-1;1[$ et prend ses valeurs dans $]0;+\infty[$.

Soit $v : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Par composition de u suivie de v, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est donc dérivable sur $]-1;1[$.

Par produit de deux fonctions dérivables, la fonction f est donc dérivable sur $]-1;1[$.

④ Montrer que f est dérivable en -1 et donner la valeur de $f'(-1)$. Interpréter graphiquement le résultat.

f dérivable en $-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \in \mathscr{D}_f}} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)}$ existe $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1}$ existe.

En posant $h = x + 1$ (soit $x = -1 + h$), on a : f dérivable en $-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ existe.

Pour tout $h > 0$, posons $g(h) = \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{h\sqrt{1-(h-1)^2}}{h} = \sqrt{h(2-h)}$

$\lim\limits_{h \to 0^+} h(2-h) = 0^+ et \lim\limits_{h \to 0^+} \sqrt{h} = 0^+$

Par composition, $\lim\limits_{h \to 0^+} g(h) = 0$, montrant ainsi que f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

La courbe admet donc une tangente horizontale au point $(1;0)$.

⑤ Montrer que f n'est pas dérivable en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

f dérivable en $1 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ existe.

Pour tout $h < 0$, posons $g(h) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{(2+h)\sqrt{1-(1+h)^2}}{h} = \dfrac{(2+h)\sqrt{-h(2+h)}}{h}$.

Pour tout $h < 0$, on a $h = -\sqrt{h^2} = -\sqrt{(-h) \times (-h)} = -\sqrt{-h} \times \sqrt{(-h)}$

Pour tout $h < 0$, $g(h) = \dfrac{(2+h)\sqrt{-h(2+h)}}{-\sqrt{-h} \times \sqrt{(-h)}} = \dfrac{(2+h)\sqrt{2+h}}{-\sqrt{-h}}$.

$\lim\limits_{h \to 0^-} (2+h)\sqrt{2+h} = 2\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{h \to 0^-} -\sqrt{-h} = 0^-$.

Par quotient, $\lim\limits_{h \to 0^-} g(h) = -\infty$, donc f n'est pas dérivable en 1, mais on a néanmoins l'existence d'une tangente verticale en $(1;0)$.

⑥ Montrer que pour tout $x \in\,]-1;1[$, $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Pour tout $x \in]-1;1[$, on a :

$f'(x) = 1 \times \sqrt{1-x^2} + (x+1)\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1 - x^2 - x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑦ En déduire le tableau de variation de f, en calculant la valeur exacte du maximum.

-1 est racine évidente du trinôme au numérateur, qui se factorise donc en :

$-2x^2 - x + 1 = -2(x+1)(x - \frac{1}{2})$.

Il est toujours négatif sauf entre -1 et $0,5$ donc :

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
$-2x^2-x+1$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{1-x^2}$	0	$+$		$+$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$
var. de f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

⑧ Donner une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

f est dérivable en 0 donc la courbe admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées d'équation :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = x+1$

⑨ Étudier la position relative de (T) et de $\mathscr{C}_f$.

Soit d la fonction définie sur $[-1;1]$ par $d(x) = f(x) - (x+1)$

$$d(x) = (x+1)\left(\sqrt{1-x^2}-1\right) = (x+1)\left(\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{\sqrt{1-x^2}+1}\right) = (x+1)\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}+1}$$

La tangente intersecte donc la courbe aux points d'abscisse -1 et 0 et est partout ailleurs au dessus de la courbe, du fait que pour tout $x \in]-1;0[\cup]0;1]$, $d(x) < 0$.